

Chapitre 5 Séries entières

Dans ce cours nous étudions une classe particulière de séries de fonctions, à savoir les séries entières qui possèdent des propriétés spéciales (convergence uniforme, régularité de la fonction somme, ...).

Le domaine d'application des séries entières est très vaste. Citons quelques exemples d'applications :

- Calcul numérique d'intégrales.
- Calcul approché des valeurs numériques de certaines fonctions (exponentielle, logarithme, ...)
- Résolution de certaines équations différentielles.

1 - Définition - Rayon de convergence

1.1. Définition.

Définition 1.1 : On appelle série entière réelle une série de fonction de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $\forall n \geq 0, a_n \in \mathbb{R}$ et où x est une variable réelle.

Exemples

1°/ Série géométrique : $1 + x + \dots + x^n + \dots$. Cette série est convergente pour $|x| < 1$ et sa somme dans ce cas est $\frac{1}{1-x}$. Elle est divergente pour $|x| \geq 1$.

2°/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$.

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ est aussi une série entière où $a_n = \frac{1}{n!}$ pour n pair et $a_n = 0$ pour n impair.

L'exemple 1 fait apparaître un intervalle où la série est convergente. Le problème qui se pose est de déterminer l'ensemble des valeurs x pour lesquelles une série entière est convergente et d'étudier alors les propriétés de la fonction somme.

1.2. Rayon de Convergence

Définition #2. Soit $\sum a_n x^n$ st une série entière réelle.
On appelle rayon de convergence de cette série entière,
le nombre réel positif R vérifiant:

- Pour $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge absolument
- Pour $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ diverge.

L'ensemble $I_R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R\}$ st appelé intervalle ouvert de convergence.

Remarque Le rayon de convergence, R , peut être:

- 0. alors $\sum a_n x^n$ ne converge absolument qu'en $x=0$.
- $R > 0$ $\sum a_n x^n$ c.v. abs. sur I_R
- $R = +\infty$ $\sum a_n x^n$ c.v. abs. sur \mathbb{R} .



1.3. Détermination du rayon de Convergence

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On suppose $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n \neq 0 \forall n \geq n_0$.

On va appliquer le critère de d'Alembert ou de Cauchy à la série $\sum |a_n x^n|$. Posons $f_n(x) = a_n x^n$. On a

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \text{ définie pour tout } n \geq n_0$$

Supposons que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ admet une limite finie ou infinie

$$1^\circ / \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ c.v. abs. pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction

$S(x) = \sum a_n x^n$ est définie dans \mathbb{R} tout entier.

$$2^\circ / \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = +\infty \quad \forall x \neq 0.$$

Donc $\sum a_n x^n$ ne converge pas absolument

soit $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = +\infty \Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1, |f_{n+1}(x)| > |f_n(x)|$
 $|f_n(x)|$ suite croissante. ne tend pas vers 0. $\sum f_n(x)$ n'est pas convergente.

$$3- \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \quad (l \neq 0, \text{ fin}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = l|x|.$$

a) si $|x| < \frac{1}{l}$ alors $\sum a_n x^n$ converge absolument.

b) si $|x| > \frac{1}{l}$ alors $\sum |a_n x^n|$ diverge et $\sum a_n x^n$ diverge aussi.
Car à partir d'un certain rang n , $|f_{n+1}(x)| > |f_n(x)|$ et $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 à l'infini.

c) si $|x| = \frac{1}{l}$. La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

Remarque La règle de Cauchy permet parfois de conclure. À la règle de d'Alembert ne le permet pas.

Théorème 1 Si $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ (finie ou infinie) alors $R = \frac{1}{l}$.
De même si $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ (finie ou infinie) alors $R = \frac{1}{l}$.

Exemples

1°/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. $a_n = \frac{1}{n!}$. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow R = +\infty$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est abs. convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{I}R = \mathbb{R}$.

2°/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$. i/ si $0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} r^n = 0$.
alors $R > 1$

ii/ si $r > 1$ $\frac{\sin n}{n} r^n$ n'admet pas de limite.
 $\Rightarrow \sum \frac{\sin n}{n} r^n$ est divergente $\Rightarrow R \leq 1$.

D'où $R = 1$

1.4. Cas où certains a_n sont nuls.

$\sum \frac{x^{2n+1}}{2^n(n+1)}$, Ici $a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Donc on ne peut pas faire comme précédemment.

Pour contourner cette difficulté, on pose $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n(n+1)}$.
 $\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{(n+1)|x|^2}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^2}{2}$. Donc si $\frac{|x|^2}{2} < 1$ la série converge absolument.
Si $\frac{|x|^2}{2} > 1$, la série diverge.

1.5. Lemme d'Abel: Si $\sum a_n x^n$ converge pour $x = x_0 \neq 0$ alors elle est absolument convergente pour tout x t.q. $|x| < |x_0|$ et, en plus, on a $R \geq |x_0|$ (R : rayon de convergence de la série)

Preuve: $\sum a_n x_0^n$ cv $\Rightarrow a_n x_0^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0$ on a $|a_n x_0^n| \leq 1$. Soit $|x| < |x_0|$
 $|a_n x^n| = \underbrace{|a_n x_0^n|}_{\leq 1} \underbrace{\left|\frac{x}{x_0}\right|^n}_{< 1} \leq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ terme général d'une série géométrique convergente.

2. Opérations sur les séries entières

2.1. Multiplication par un scalaire.

Soit λ scalaire $\neq 0$. Les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum \lambda a_n x^n$ ont même intervalle de convergence et sur cet intervalle

$$\sum_{n \geq 0} \lambda a_n x^n = \lambda \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

2.2. Somme de 2 séries entières

$$\begin{array}{ll} \sum_n a_n x^n & \text{pour rayon de convergence } R_1 \\ \sum_n b_n x^n & \text{" " " } R_2. \end{array}$$

On appelle somme de ces deux séries la série entière

$$\sum_n (a_n + b_n) x^n$$

Théorème 2 Le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) x^n$ est égal à $R = \min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$ et vérifie $R \geq R_1$ si $R_1 = R_2$.

Dém. Soit $|x| < \min(R_1, R_2)$ $|a_n + b_n| x^n \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$
 $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont abs. cv $\Rightarrow \sum (a_n + b_n) x^n$ est abs. cv.

$$\Rightarrow R \geq \inf(R_1, R_2).$$

Si $R_1 \neq R_2$ (par exemple $R_1 < R_2$). Pour $R_1 < |x| < R_2$.

$\sum a_n x^n$ diverge et $\sum b_n x^n$ converge $\Rightarrow \sum (a_n + b_n) x^n$ diverge

$$\Rightarrow R \leq R_1 = \min(R_1, R_2).$$

Exemple 1°/ Le rayon de cv. de $\sum x^n$ est $R_1 = 1$

Le rayon de cv. de $\sum \frac{1}{2^n} x^n$ est $R_2 = 2$.

En utilisant la règle d'Hadamard, on montre que le rayon de convergence de la somme est 1. Ce qui confirme le théorème 2.

2°/ Le rayon de cr de $\sum x^n$ est $R_1 = 1$ (Mais le rayon de cr de la somme est $\sum \frac{1}{2^n} x^n$ est $R = 1$)
 // " $\sum \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right) x^n$ est $R_2 = 1$

2.3 Produit de 2 séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_1 et R_2 et de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$.
 Pour $|x| \leq \min(R_1, R_2)$ $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont abs.

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Alors $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et le rayon de convergence R du produit vérifie $R \geq \min(R_1, R_2)$

Exemple $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

3. Fonction définie par une série entière

$\sum a_n x^n$ une série entière. R son rayon de convergence. $R \neq 0$.

I_R son intervalle de convergence. On définit la fonction

f sur I_R par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in I_R$

3.1. Continuité

Théorème 3 Toute série entière est uniformément convergente sur tout intervalle fermé centré en 0 et inclus dans I_R .
 Puisque $a_n x^n = f_n(x)$ est continue sur I_R alors f est continue sur I_R .

Dém Soit $[-p, p] \subset I_R$. $\sum a_n x^n$ sera normalement convergente sur $[-p, p]$ donc uniformément.

Les f_n sont continues.

Alors f est continue sur I_R .

Remarques

- 1°/ $\sum a_n x^n$ n'est pas forcément convergente si $|x| = R$.
2°/ On n'a pas en général la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur $I_R =]-R, R[$.

Exemples

1°/ $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $] -1, 1[$.
en effet $R = 1$. $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

On pose $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, on a $\forall x \in] -1, 1[$

$$|f(x) - \phi_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

et $\sup_{]-1, 1[} |f(x) - \phi_n(x)| = +\infty$. Pas de conv. uniforme sur $] -1, 1[$.

2°/ $\sum \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1.

$\sum \frac{x^n}{n}$ diverge pour $x = 1$ et converge pour $x = -1$.
Soit $f(x)$ la somme de la série entière. On a.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{n}$$

D'après le théorème des séries alternées on a.

$$\forall x \in [-1, 0] \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\sup_{[-1, 0]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \sup_{[-1, 0]} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n}$ conv. unif. sur $[-1, 0]$. Donc f est continue sur $[-1, 0]$ et pas seulement sur $] -1, 0]$.

Dans ce qui suit, $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Thé $\sum a_n x^n$ série entière de rayon de convergence $R > 0$
si $\sum a_n R^n$ (resp $\sum a_n (-R)^n$) converge alors la
série est uniformément convergente sur $[0, R]$ (resp $[-R, 0]$)

3.2. Intégration

Th.5 $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $\sum a_n x^n$ ont le même rayon de convergence
 et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t) dt$.

Remarque

Exemple

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x \in]-1, 1[. \text{ D'après la Th.5, on a }$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ est convergente, Th.4 $\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est continue sur $[-1, 0]$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in [-1, 1[\Rightarrow x=2.$$

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

3.3. Dérivation

Th.6 $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence

En plus f est de classe C^1 sur $] -R, R[$ et on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in] -R, R[.$$

Th.7 Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$.

alors f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$ et on a

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} \quad \forall x \in] -R, R[$$

et pour $x=0$, on obtient $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.

Exemple On a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \forall x \in]-1, 1[$

$$\text{Th.6} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

$$\text{Th.7} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^p} = \frac{1}{p!} \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) x^{n-p} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

4- Développement d'une fonction en série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$
et soit S la somme définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
Nous avons vu que S est de classe C^∞ sur $] -R, R[$.

Réciproque? Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant 0, on se propose de chercher.
S'il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R ,
dont la somme $S(x)$ coïncide avec f sur $] -R, R[$
Il faut que f soit de classe C^∞

4.1. Définition Soit f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage I de 0.

On dit que f est développable en série entière si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un voisinage J de 0

$$\forall x \in J, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série en C .
Car pour tout x tel que $|x| < 1$, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

4.2. Développements obtenus par la formule de Mac-Laurin
 f de classe C^∞ au voisinage de 0. On applique la formule de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad 0 < \theta < 1$$

$$\text{Soit } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

ETUSUP.com

La question est alors: Est-ce que

$$\text{Si c'est oui, on aura } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Définition : On appelle série de Mac Laurin associée à f la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Th 8 Soit f de classe C^∞ sur un voisinage I de 0

s'il existe une constante positive K t. q.

$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq K$ alors f se développe en série entière et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Preuve $|f(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

La série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente (règle de d'Alembert)

$$\Rightarrow \left| \frac{x^n}{n!} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow |f(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq K$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..